



TITLE:

二層 β 面上の有限振幅孤立渦
の発展について(流体中の非線形波
動の数理的側面)

AUTHOR(S):

松浦, 知徳

CITATION:

松浦, 知徳. 二層 β 面上の有限振幅孤立渦の発展について(流体中の非線形波動の数理的側面). 数理解析研究所講究録 1992, 782: 90-100

ISSUE DATE:

1992-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82530>

RIGHT:

二層 β 面上の有限振幅孤立渦の発展について

防災科学技術研究所 松浦 知徳 (Tomonori Matsuura)

1. はじめに

海洋中の強い孤立渦の成層構造, カ学バランス及び挙動がアメリカ東岸沖での暖水塊の集約的観測 (Joyce et al., 1985) や日本における東北沖での観測 (Yasuda et al., 1991) により明らかになりつつある。特に, 暖冷水塊の成層構造における有限振幅性の効果とそれらのカ学バランスとしての遠心力の効果は, 海洋の中規模スケールカ学現象の地衡流現象からのずれとして興味深い。

海洋中の強い孤立渦のモデル研究は, 準地衡流カ学としての McWilliams and Flierl (1979) と Mied and Lindemann (1979) の数値研究以来, 急速に進展してきた。準地衡流方程式と異なった発展方程式として, 中規模渦の有限振幅性を考慮した中間規模・地衡流方程式 (Yamagata, 1982; Charny and Flierl, 1982; Matsunaga and Yamagata, 1982) がある。この発展方程式は渦のスケールが Rossby の変形半径より大きな弱非線形渦に対し

て適用できる。上記の中間規模・地衡流力学より非線形性が強い力学に対して, Cushman-Roisin (1986) はフロンタル・地衡流方程式を導いている。遠心力の効果を取り入れた発展方程式としてバランス方程式 (McWilliams et al., 1986) がある。このモデルは, 準地衡流力学と異なり, 暖水塊と冷水塊で非対称性が出てくる。

海洋中の中規模渦に対する成層構造はしばしば二層海洋として近似される。Flierl (1984) は, 変形半径程度の大きさの強い暖水塊に対し, 上層を傾度流バランスさせた力学とし, 下層に対し準地衡流方程式を使うことにより互いの層の関係を調べた。今回, 二層海洋における変形半径よりいくらか大きな渦に対する発展方程式を二層プリミティブ方程式より導いた。その場合, 上層がフロンタル・地衡流方程式になり, 下層が準地衡流方程式になることがわかった。なのでその結果を示す。

2. 発展方程式の導出

2.1 二層プリミティブ方程式

二層海洋におけるベクトル面上の浅水近似方程式は, 慣習となっている表記を使うと, 上層で

$$\begin{cases} u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 u_{1y} - f v_1 = -\beta_{1x} + A_H \nabla^2 u_1 & (1.a) \\ v_{1t} + u_1 v_{1x} + v_1 v_{1y} + f u_1 = -\beta_{1y} + A_H \nabla^2 v_1 & (1.b) \\ \eta_t - \{(H_1 - \eta) u_1\}_x - \{(H_1 - \eta) v_1\}_y = 0 & (1.c) \end{cases}$$

となり, そして下層では

$$\begin{cases} u_{2t} + u_2 u_{2x} + v_2 u_{2y} - f v_2 = -\beta_{2x} - g' \eta_x - R u_2 + A_H \nabla^2 u_2 & (2.a) \\ v_{2t} + u_2 v_{2x} + v_2 v_{2y} + f u_2 = -\beta_{2y} - g' \eta_y - R v_2 + A_H \nabla^2 v_2 & (2.b) \\ \eta_t + \{(H_2 - b + \eta) u_2\}_x + \{(H_2 - b + \eta) v_2\}_y = 0 & (2.c) \end{cases}$$

となる。ここで, コリオリパラメータは,

$$f = f_0 + \beta y \quad (3)$$

と定義される。 $g' (= \frac{\Delta \rho}{\rho} g)$ は reduced gravity, H_1 と H_2 はそれぞれ, 静止状態での上・下層の水深を示す。また, b は下層に存在する海底地形の高さである。 η は上・下層間の界面の変位であり, 凸を正としている。さらに, 下層に底面摩擦として係数 R のレーリー・ダンピングを仮定している。

式(1), (2)を無次元化するために, 以下に示す*印の無次元量を導入する (Chassignet and Cushman-Roisin, 1991)。

$$\begin{cases} (x^*, y^*) = (x/L, y/L), \quad \eta^* = \eta/h_0, \quad b^* = b/b_0 \\ (\beta_1^*, \beta_2^*) = (\beta_1/g'h_0, \beta_2/P) \\ (u_1^*, v_1^*) = (u_1/g'h_0/f_0 L, v_1/g'h_0/f_0 L) \\ (u_2^*, v_2^*) = (u_2/P/f_0 L, v_2/P/f_0 L) \\ t^* = t/T \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 L は渦の代表長さ、 h_0 は界面の最大変位、 b_0 は海底地形の最大高さ、 P はバロトロピックな圧力場を示す。(4)の無次元量を式(1)と(2)に代入し、*印を無視すると以下の無次元方程式を得る。

$$\begin{cases} \omega u_{1t} + \varepsilon(u_1 u_{1x} + v_1 u_{1y}) - v_1 - B y v_1 = -p_{1x} + A_h \nabla^2 u_1 & (5.a) \\ \omega v_{1t} + \varepsilon(u_1 v_{1x} + v_1 v_{1y}) + u_1 + B y u_1 = -p_{1y} + A_h \nabla^2 v_1 & (5.b) \\ \omega \zeta_t + \varepsilon(u_1 \zeta_x + v_1 \zeta_y) - (S - \varepsilon \zeta)(u_{1x} + v_{1y}) = 0 & (5.c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega u_{2t} + \gamma \varepsilon(u_2 u_{2x} + v_2 u_{2y}) - v_2 - B y v_2 = -\gamma'(p_{1x} + \zeta_x) - \alpha u_2 + A_h \nabla^2 u_2 & (6.a) \\ \omega v_{2t} + \gamma \varepsilon(u_2 v_{2x} + v_2 v_{2y}) + u_2 + B y u_2 = -\gamma'(p_{1y} + \zeta_y) - \alpha v_2 + A_h \nabla^2 v_2 & (6.b) \\ \omega \zeta_t + \gamma \varepsilon(u_2 \zeta_x + v_2 \zeta_y) - \gamma S a / \delta \cdot (u_2 b_x + v_2 b_y) \\ + (\gamma S / \delta - \gamma S a / \delta \cdot b + \gamma \varepsilon \zeta)(u_{2x} + v_{2y}) = 0 & (6.c) \end{cases}$$

式(5)と(6)の無次元パラメータは以下のように定義される。

$$\left(\begin{array}{l} \omega = 1/f_0 T, \quad \varepsilon = g' h_0 / f_0^2 L^2, \quad B = \beta L / f_0 \\ \gamma = P / g' h_0, \quad S = g' H_1 / f_0^2 L^2, \quad \delta = H_1 / H_2 \\ a = b_0 / H_2, \quad \alpha = R / f_0, \quad A_h = A_h / f_0 L^2 \end{array} \right) \quad (7)$$

ここでの発展方程式の導出では、海底地形の変化がない平坦な場合で非粘性の問題に限定する。

2.2 変形半径より大きな有限振幅渦の発展方程式

海洋を二層で近似する場合、上層は下層に比べて薄く、したがって、一般的には下層は上層に比べて流れが弱いと考

られる。その場合、界面の有限振幅性が重要となってくる。
 実際の海洋での観測値を参考にして、無次元パラメータを以下のように関係づける。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad \varepsilon < O(1) \\ \text{ii)} \quad \omega = \beta = \Delta_1 \varepsilon^2 \\ \text{iii)} \quad \delta = \Delta_2 \varepsilon \\ \text{iv)} \quad \delta = \Delta_3 \varepsilon^2 \\ \text{v)} \quad \gamma = \Delta_4 \varepsilon \\ \text{vi)} \quad \alpha = A_h = 0 \\ \text{vii)} \quad a = 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

ここで、 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ は $O(1)$ の値である。iii)は $h_0/H_1 \sim O(1)$ であることを示しており、 ε を変形半径 $R_d (= 1/4_0 \cdot \sqrt{g' H_1 H_2 / (H_1 + H_2)})$ を用いて書き直すと、

$$\varepsilon = \left(\frac{R_d}{L} \right)^2 \cdot \left(\frac{h_0}{H_1} \right) \cdot (1 + \delta) \quad (9)$$

となる。iv)より $\delta \sim O(\varepsilon^2)$ なので無視でき、非地衡流であるためには、 $(R_d/L)^2 \sim \varepsilon$ であり、渦のスケールは内部変形半径より3倍程度大きくなければならない。(8)の条件を式(5)と(6)に代入すると以下の式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 \varepsilon^2 u_{1t} + \varepsilon (u_1 u_{1x} + v_1 u_{1y}) - v_1 - \Delta_1 \varepsilon^2 y v_1 = -p_{1x} \quad (10.a) \\ \Delta_1 \varepsilon^2 v_{1t} + \varepsilon (u_1 v_{1x} + v_1 v_{1y}) + u_1 + \Delta_1 \varepsilon^2 y u_1 = -p_{1y} \quad (10.b) \\ \Delta_1 \varepsilon \eta_t + (u_1 \eta_x + v_1 \eta_y) - (\Delta_2 - \gamma)(u_{1x} + v_{1y}) = 0 \quad (10.c) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \Delta_1 \varepsilon^2 u_{2t} + \Delta_4 \varepsilon^2 (u_2 u_{2x} + v_2 u_{2y}) - v_2 - \Delta_1 \varepsilon^2 y v_2 = -\Delta_4^{-1} \varepsilon^{-1} (p_{1x} + \eta_x) & (11.a) \\ \Delta_1 \varepsilon^2 v_{2t} + \Delta_4 \varepsilon^2 (u_2 v_{2x} + v_2 v_{2y}) + u_2 + \Delta_1 \varepsilon^2 y u_2 = -\Delta_4^{-1} \varepsilon^{-1} (p_{1y} + \eta_y) & (11.b) \\ \Delta_1 \varepsilon^2 \eta_t + \Delta_4 \varepsilon^2 (u_2 \eta_x + v_2 \eta_y) + (\Delta_2 \Delta_3^{-1} \Delta_4 + \Delta_4 \varepsilon^2 \eta) (u_{2x} + v_{2y}) = 0 & (11.c) \end{cases}$$

これらの方程式 (10) と (11) を ε で展開すると, $O(\varepsilon^{-1})$ で

$$\begin{cases} p_{1x}^{(0)} + \eta_x^{(0)} = 0 & (12.a) \\ p_{1y}^{(0)} + \eta_y^{(0)} = 0 & (12.b) \end{cases}$$

となる。式 (12) は最低次において, 上層の圧力分布が界面の変化によつて補償することを示している。 $O(\varepsilon)$ では, 運動方程式は上下層とも地衡流バランスをしており, 連続の式との関連から流線関数を以下のように導入できる。

$$\begin{cases} u_1^{(0)} = \eta_y^{(0)} = -\psi_{1y}^{(0)} & (13.a) \\ v_1^{(0)} = -\eta_x^{(0)} = \psi_{1x}^{(0)} & (13.b) \\ u_2^{(0)} = -\psi_{2y}^{(0)} & (13.c) \\ v_2^{(0)} = \psi_{2x}^{(0)} & (13.d) \end{cases}$$

$O(\varepsilon^0)$ で地衡流バランスをしているので, 上下層ともに圧力場と流速場は等価になる。また, 式 (13 a, b) より, 界面の変化 $\eta^{(0)}$ も上層の流線場と付号を変えて等価となる。

$O(\varepsilon^1)$ から上層の発展方程式

$$\begin{aligned} \psi_{1t}^{(0)} - \Delta_1^{-1} (\Delta_2 + \psi_1^{(0)}) \cdot J(\psi_1^{(0)}, \nabla^2 \psi_1^{(0)}) - \Delta_1^{-1} \{ \psi_{1x}^{(0)} J(\psi_1^{(0)}, \psi_{1x}^{(0)}) \\ - \psi_y^{(0)} \cdot J(\psi^{(0)}, \psi_y^{(0)}) \} = \Delta_1^{-1} \Delta_4 \cdot J(\psi_1^{(0)}, \psi_2^{(0)}) \end{aligned} \quad (14)$$

が求まる。

$O(\varepsilon^2)$ から下層の発展方程式

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \psi_2^{(0)})_t + \Delta_1^{-1} \Delta_4 \cdot J(\psi_2^{(0)}, \nabla^2 \psi_2^{(0)}) + \psi_{2x}^{(0)} \\ = -\Delta_2^{-1} \Delta_3 \left\{ \Delta_4^{-1} \psi_{1t}^{(0)} + \Delta_1^{-1} \cdot J(\psi_2^{(0)}, \psi_1^{(0)}) \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

が求まる。ここで下層の運動は $O(\varepsilon)$ の大きさである。

式(14)の左辺はフロンタル・地衡流方程式と同様で、松浦・山形(1984)と Cushman - Roisin (1986) がバロトロピック又は reduced gravity モデルに対して導いている。式(15)は良く知られた界面での発散がある準地衡流方程式である。二層モデルの場合、式(14)と(15)から下層が $O(\varepsilon)$ の強さの現象でも上層へ影響があり、弱く下層の運動を無視して reduced gravity モデルを使うことの不適当さを示している。また、上層は $O(\varepsilon)$ でロスビー波を分散し、下層は $O(\varepsilon^2)$ の大きさの影響を受ける。

3. 数値実験結果

ほぼ(8)のパラメータ範囲の有限振幅の暖水塊に対する数値実験を二層β面近似プリミティブ方程式を使って行った。計算領域は $640 \text{ km} \times 640 \text{ km}$ の範囲で格子間隔を 10 km とした。静止状態の上層の水深 $H_1 = 500 \text{ m}$ 、下層の水深 $H_2 = 5000 \text{ m}$ 、 $f_0 = 9 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 、 $\beta = 1.9 \times 10^{-11} \text{ km}^{-1} \text{ s}^{-1}$ 、 $g' = 2 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ とした。この場合のロスビー波の内部変形半径(R_d)は 34 km となる。初期

渦の条件として, 上層の最大流速 $U_1 = 1 \text{ m s}^{-1}$, 下層の最大流速 $U_2 = 0.2 \text{ m s}^{-1}$, スケール $L = 42.4 \text{ km}$ (渦の中心から最大流速の位置までの距離) に設定した。

上層の圧力分布, 下層の圧力分布, 界面の変位分布の発展を図1に示す。上層の圧力 p_1 と界面 η は長時間渦の孤立性が保たれており, 12 スビー波の発生は弱く二次的である。したがって, 上層の発展パターンは式(14)から予想されるものに合っている (フロントル地衡流)。下層の p_2 は 12 スビーウェーブを激しく出して減衰していく。この過程は式(15)で近似される (準地衡流)。30 日での p_1 の弱い 12 スビー波の分散は下層の p_2 と結びついている。60 日での p_2 の左隅の正負の弱い渦はほぼ上層だけの渦になったものが 12 スビー波を下層に放射することによってできたものである。

4. おわりに

最後に, 今回導いた発展方程式の適用範囲について議論する。 $h_0/H_1 \ll 0(1)$ の渦では, 下層の渦構造も強く上下層ともに準地衡流力学で近似可能である。その場合, 渦はバロトロピック 12 スビー波を分散させながら $\int_0^t \varepsilon'$ の時間スケールで減衰していく。それに対し, 下層の渦構造が上層のものに比べて弱い場合, $h_0/H_1 \sim 0(1)$ (有限振幅) となる。さらに $(R_0/L)^2$

$\sim O(\varepsilon)$ を満たす渦では発展の仕方がゆくりしており, $f_0 \varepsilon^{-2}$ の時間スケールで発展していく。このような渦に対して, 今回導いた発展方程式を適用することが可能である。実際, 東北沖でしばしば観測される長寿命の大型暖水塊がこの力学の適用可能な渦と考えられる。 $h_0/H_1 \sim O(1)$ でありかつ, スケールバリエーションの変形半経程度 ($R/L \sim O(1)$) の場合, 12 スピード数は 1 に近づき非線形性の非常に強い渦である (式 9 参照)。このような渦に対しては, 遠心力の効果を無視できなくなる (Flierl, 1984)。

参考文献

- Charney, J. G., and G. R. Flierl, 1982: Oceanic Analogue of Large-Scale Atmospheric Motion. *Evolution of Physical Oceanography*, MIT Press, 504-548.
- Chassignet, E. P., and B. Cushman-Roisin, 1991: On the Influence of a Lower layer on the Propagation of Nonlinear Oceanic Eddies. *J. Phys. Oceanogr.* 21, 939-957.
- Cushman-Roisin, B., 1986: Frontal Geostrophic Dynamics, *J. Phys. Oceanogr.*, 16, 132-143.
- Flierl, G. R., 1984: Rossby Wave Radiation from a Strongly Nonlinear Eddy, *J. Phys. Oceanogr.*, 14, 47-58.

- Joyce, T.M., 1985: Gulf Stream Warm-Core Ring Collection: An Introduction, *J. Geophys. Res.*, 90, 8801-8802.
- McWilliams, J.C., and G.R. Flierl, 1979: On the Evolution of Isolated Nonlinear Vortices. *J. Phys. Oceanogr.*, 9, 1155-1182.
- McWilliams, J.C., P.R. Gent and N.J. Norton, 1986: The Evolution of Balanced, Low-Mode Vortices on the β -plane. *J. Phys. Oceanogr.*, 16, 838-855.
- Matsuura, T and T. Yamagata, 1982: On the Evolution of Nonlinear Planetary Eddies Larger than the Radius of Deformation. *J. Phys. Oceanogr.*, 12, 440-456.
- Mied, R., and G. Lindemann, 1979: The Propagation and Evolution of Cyclonic Gulf Stream Rings. *J. Phys. Oceanogr.*, 9, 1183-1206.
- Yamagata, T., 1982: On Nonlinear Planetary Waves: A Class of Solution missed by the Quasi-Geostrophic Approximation. *J. Oceanogr. Soc. Japan.*, 38, 236-244.
- Yasuda, I., K. Okuda and M. Hironaka, 1991: Evolution of Kuroshio Warm-Core Ring - Variability of the Hydrographic Structure. *Deep Sea Res.*, in press.

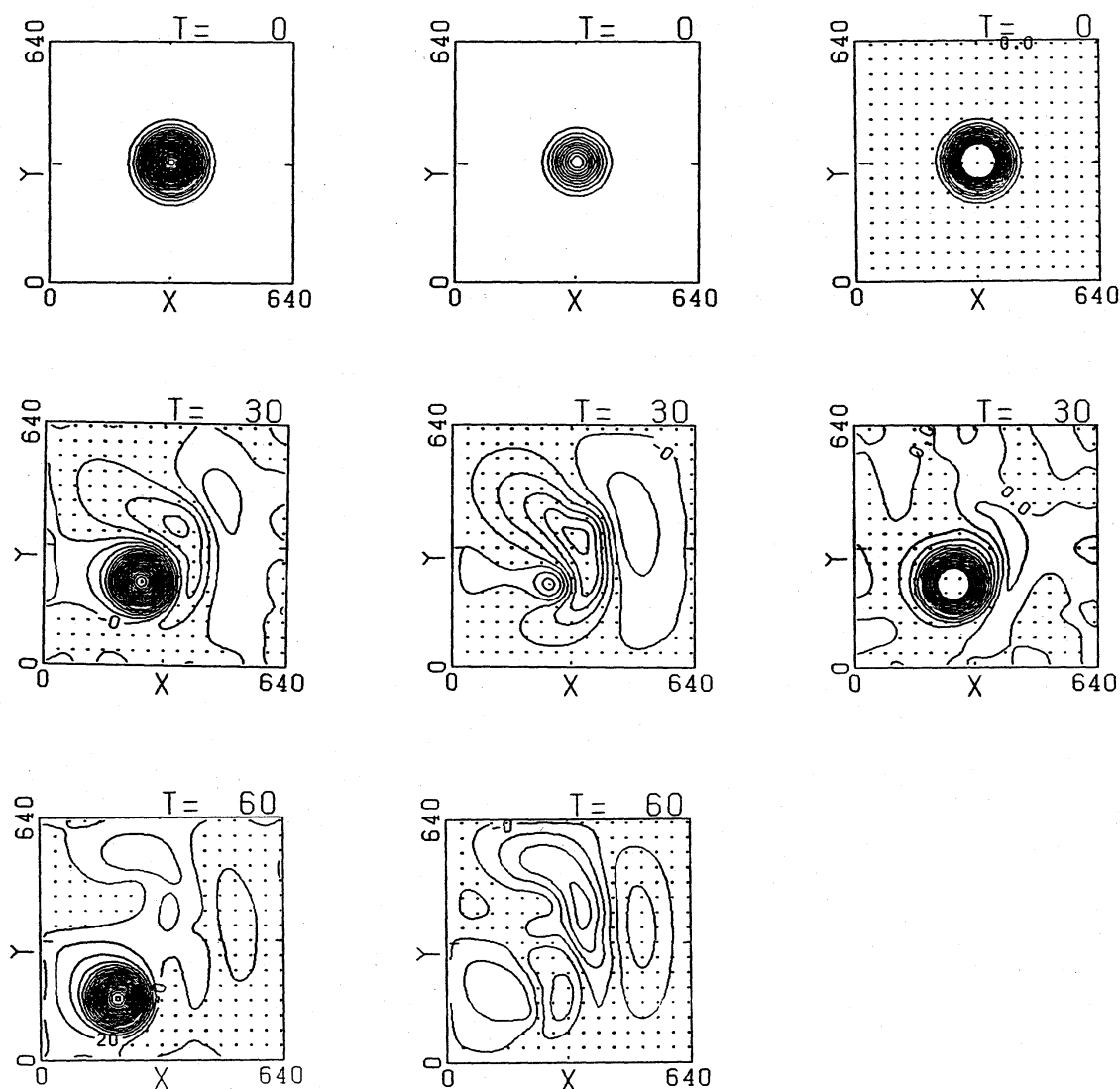
(a) 上層圧力 p_1 (b) 下層圧力 p_2 (c) 界面変位 η 

図1. 二層 β 面上の有限振幅孤立渦の発展（プリミティブ方程式を用いた数値実験結果）。時間間隔は30日。

p_1 と p_2 のコンター間隔は $2.5 \times 10^8 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ 、 η のコンター間隔は 5 m 。